***Лекция 7***

**Статический принцип возможных скоростей.**

**Обобщенные координаты.**

**Число степеней свободы системы.**

Рассмотрим систему точек {с идеальными голономными нестационарными связями. Положение системы в инерциальной системе отсчета определяется координатами (x1, y1, z1; x2, y2, z2;… ;xn, yn, zn). Эти 3n координат подчиняются s уравнениям голономных связей:

Фi(x1…zn; t) ≥ 0

Таким образом, из 3n координат только *l* = 3n-s является независимыми. Остальные s выражаются через них с помощью уравнений связи.

Для голономных систем, число *l* называется ***числом степеней свободы***. Число ***l***  может быть определено как число координат, которое надо зафиксировать, чтобы система остановилась.

Декартовы координаты не всегда являются удобными. Кроме них используют угловые координаты и их комбинации с линейными координатами. ***Обобщенными координатами qi*** называются параметры любой размерности, определяющие положение системы.

1

2

3

Так, обобщенными координатами системы трех тел можно назвать: координаты центра и угол поворота катка 1, угол поворота блока 2, координаты тела 3. Все они связаны между собой ввиду отсутствия проскальзывания катка, нерастяжимости нити, наличия направляющих. Только одна из них является независимой, поскольку при фиксации любого из перечисленных параметров система потеряет подвижность. Значит, система имеет одну степень свободы.

Условимся в дальнейшем под обобщенными координатами понимать только независимые координаты qi (i=1,2…*l*).

**Возможная, действительная и виртуальная скорость точки системы. Идеальные связи.**

Рассмотрим движение несвободной точки под действием силы и нестационарной геометрической связи

q1

**R**

q2

0

Сила и связь допускают множество ***возможных движений***  точки, отличающихся начальными условиями. Возможное движение, происходящее в действительности и отвечающее конкретным начальным условиям, является ***действительным***.

Уравнение связи (1) удобно трактовать как уравнение движущейся поверхности, по которой движется точка. На рисунке изображена фотография поверхности в момент времени t.

В данный момент материальная точка может оказаться в произвольной точке поверхности связи и иметь произвольно направленную возможную скорость**,** которая соответствует конкретным начальным условиям. Для этих конкретных начальных условий скорость является действительной.

Любая возможная скорость является суммой переносной скорости вместе с поверхностью и относительной скорости **,** касательнойк поверхности связи.

При нестационарной связи относительная скорость не может совпасть с действительной скоростью, т.е. осуществимой. Поэтому ее называют воображаемой, или ***виртуальной***.

Если поверхность связи гладкая, то ее реакция **N** нормальна к поверхности. Подход Лагранжа использует тот факт, что нормальная реакция не создает мощности только на виртуальной скорости

При стационарной связи точка движется по неподвижной поверхности, ее переносная скорость равна нулю, возможные и виртуальные скорости совпадают и касательны к поверхности связи.

**Обобщенные силы и реакции. Идеальные связи.**

Рассмотрим точку системы. Обозначим равнодействующие активных сил и реакций связей, действующих на точку, . Все возможные законы движения, включая действительный закон движения точки, являются функциями независимых обобщенных координат и времени

Они удовлетворяют уравнениям связей и уравнениям Ньютона

Возможная скорость точки складывается из переносной и виртуальной (относительной) скоростей

Здесь и в дальнейшем повторяющийся индекс говорит о суммирование по индексу: от 1 до n, от 1 до l.

Вычислим мощность всех сил на виртуальных скоростях

Выражения в скобках (ниже символ суммирования по k подразумевается, поскольку индекс k повторяется)

логично назвать обобщенными силами и реакциями , поскольку они являются множителями при обобщенных скоростях в выражении мощности. Обычно обобщенные силы находят как коэффициент при в выражении виртуальной мощности активных сил

Посмотрим, как это делается на примере *эллиптического маятника*. Маятник состоит из тела массы m1, скользящего поступательно без трения вдоль оси х, и шарнирно прикрепленного к нему математического маятника длины *l* и массы m2. Связи стационарны, значит виртуальные скорости являются возможными скоростями.

x

φ

m1g

*l*

При вычислении возможной мощности активных сил *m****1g***

и *m****2g***  воспользуемся независимостью и произвольностью возможных скоростей системы и . Их независимость означает, что мощность на обеих скоростях равна сумме мощностей на каждой из них. Связи идеальны и допускают каждую из возможных скоростей в двух направлениях. Попробуем дать отрицательные скорости.

Сначала, для вычисления Qx дадим скорость < 0 , положив = 0. При этом вся система движется поступательно налево со скоростью . На горизонтальном движении вертикальные силы тяжести не имеют мощности, поэтому

*Nх = 0* и *Qx = 0*

Чтобы вычислить обобщенную силу Qφ, придадим системе возможные скорости Vх = 0, < 0. Тело m1 остается неподвижным, маятник вращается по часовой стрелке. Мощность создает только момент силы m2**g** на угловой скорости .

Таким образом

Чтобы не ошибиться в знаке силы, удобно давать положительные обобщенные возможные перемещения.

Связи называются ***идеальными***, если все их обобщенные реакции равны нулю.

Идеальными являются гладкие поверхности, шарниры без трения, нерастяжимые нити и тд.

Лагранж показал, что реакции идеальных связей не влияют на движение системы по нестационарным связям.

**Статический принцип возможных скоростей.**

Рассмотрим систему с идеальными стационарными связями, находящуюся в покое. Поскольку связи стационарны, то переносные скорости отсутствуют и виртуальные скорости являются возможными.

Принцип: чтобы система оставалась в покое необходимо и достаточно равенство нулю обобщенных сил в положении равновесия.

**Необходимость**. Если система находится в покое, то скорости ее точек, а значит и мощность всех сил равны нулю.

Ввиду независимости и произвольности обобщенных скоростей

Поскольку связи идеальны, то все их обобщенные реакции равны нулю и равны нулю обобщенные силы

**Достаточность**: Пусть все . Покажем, что система остается в покое. Предположим обратное – система начала двигаться. Тогда система кинетическая энергия начинает возрастать, для стационарных связей со скоростью

Откуда

что противоречит исходному предположению. Значит, система останется в покое, что и требовалось доказать.